V Leçon 262 :Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

On considère dans toute cette leçon $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilté sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées qui elles seront à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
On rappelle que $||.||_p = (\mathbb{E}(|.|^p)^{\frac{1}{p}}$ est une norme et $(L^p, ||.||_p)$ est un espace de Banach.

a Plan

a.1 Généralités

Définition 43. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire.

- Si $\forall\epsilon > 0$, $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$. On dit que X_n converge en probabilité vers X. On notera $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$
- Si $X_n \in L^p$ converge dans L^p vers X si $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$. On parlera de convergence en norme p et on notera $X_n \overset{L^p}{\to} X$
- X_n converge presque sûrement s'il existe un ensemble de probabilité 1 sur lequel X_n converge simplement vers X. On notera $X_n \overset{p.s}{\to} X$

Proposition 38. Il y a unicité de la limite pour ces trois modes de convergences.

Théorème 33.
- La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.
- La convergence en norme p implique la convergence en probabilité.

Contre-Exemple 4. (La convergence en probabilité n'implique pas celle en norme p)
On prend X_n de loi $1 - \frac{1}{n^p}\delta_0 + \frac{1}{n^p}\delta_n$. Alors X_n converge presque sûrement vers 0 mais $\forall n \in \mathbb{N}\mathbb{E}(|X_n - 0|^p) = 1$

Théorème 34.
- Si X_n converge en probabilité vers X alors il existe une sous suite qui converge presque surement vers X.
- Si X_n converge en probabilité vers X et s'il existe $Z \in L^p$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| \leq Z$ alors X_n et X sont dans L^p et on a $X_n \overset{L^p}{\to} X$

Théorème 35. (Théorème de transfert)
Soit X une variable aléatoire à valeur réelle dont la loi sera noté $\mathbb{P}_X$. Alors :

- Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, on a $\int_\Omega \phi(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} \phi(x)d\mathbb{P}_X(x)$
- Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable alors $\phi \circ X$ est intégrable par rapport à la mesure $d\mathbb{P}$
si et seulement si
ϕ est intégrable par rapport à la mesure $d\mathbb{P}_X$ et dans ce cas $\int_\Omega \phi(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} \phi(x)d\mathbb{P}_X(x)$.

Théorème 36. (Loi Faible des Grands Nombres)
Si $X \in L^1$, alors $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \overset{\mathbb{P}}{\rightarrow} \mathbb{E}(X)$

Application 8. (Théorème de Bernoulli)
Soit $(A_n)_{n\leq 0}$ indépendantes de probabilité p, alors $\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}}{n} \overset{\mathbb{P}}{\rightarrow} p$

a.2 Convergence presque sûre

Définition 44. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ alors $\underset{n\to\infty}{limsup} A_n = \bigcap_p \bigcup_{n\leq p} A_n$

Proposition 39. $\omega \in \underset{n\to\infty}{limsup} A_n \Leftrightarrow \omega$ est dans une infinité de A_n.

Lemme 21. (Borel-Cantelli)
Soit (A_n) une suite d'évenement de $\mathcal{A}$.

- Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(\underset{n}{limsup} A_n) = 0$
- Si de plus les A_n sont indépendants alors $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\underset{n}{limsup} A_n) = 1$

Corollaire 13. S'il existe une série à termes positifs de terme général ϵ_n convergeante telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon_n) < +\infty$ alors (X_n) converge presque surement.

Corollaire 14. Si $\forall \epsilon > 0, \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < +\infty$ alors $X_n \overset{p.s}{\rightarrow} X$

Proposition 40. (Inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire réelle positive alors $\forall a > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Théorème 37. (Loi Forte des Grands Nombres)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ variables aléatoires indépendantes et identiquements distribuées tel que $\mathbb{E}(|X_1| > 0)$. Alors $\sum_{i=1}^n \frac{X_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$

Lemme 22. $\forall t \in [-1;1]$, $exp(t) \leq 1 + t + t^2$

Théorème 38. (Méthode de Monte Carlo) (Développement 1)
Soient $A, B \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que $|f| \leq A$ presque partout et $\int_I f^2 \leq B$ ainsi que (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur I.
On définit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \int_I f}{n}$
Alors e_n converge presque surement vers 0 et
$\forall \epsilon \in]0; \frac{1}{A}[$, $\mathbb{P}(|e_n| \geq \epsilon) \leq 2exp(\frac{n\epsilon^2}{4B})$

a.3 Convergence en norme p

I désigne un ensemble quelconque.

Proposition 41. Les L^p sont décroissant pour l'inclusion.

Application 9. Pour $\leq p \leq q$ on a que la convergence en norme L^∞ implique la convergence en norme L^q qui implique celle en norme L^p.
Et la convergence en norme L^p implique celle en norme L^1

Définition 45. $(X_i)_{i \in I}$ est équi-intégrable si $\underset{a \to +\infty}{lim} \int_{|X_i|>a} |X_i| d\mathbb{P} = 0$

Exemple 17.
- $X \in L^1 \Rightarrow$ X est équi-intégrable
- $(X_n)_{i \in I}$ suite de variables aléatoires convergeant dans L^1 alors (X_n) est équi-intégrable.

Définition 46. $(X_i)_{i \in I}$ est équicontinue si
$\forall \epsilon, \exists \eta > 0$, $\mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \underset{i \in I}{sup} \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leq \epsilon$

Proposition 42. $(X_i)_{i \in I}$ est équicontinue si et seulement si $(X_i)_{i \in I}$ est équi-intégrable et bornée dans L^1.

Application 10. La somme de deux familles équi-intégrables est équi-intégrable.

Théorème 39. (Vitali)
Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires intégrables et X une variable aléatoire.
$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable et converge en probabilité vers X si et seulement si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^1 vers X

a.4 Convergence en Loi

Lemme 23. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.
X et Y ont même loi $\Leftrightarrow$ X et Y ont même fonction de répartition
$\Leftrightarrow$ X et Y ont même fonction caractéristique
$\Leftrightarrow \forall \phi$ fonction bornée $\int \phi d\mathbb{P}_X = \int \phi d\mathbb{P}_Y$

Définition 47. (X_n) converge en loi vers X(on dit aussi que la suite des mesures P_{X_n} converge étroitement vers la loi P_X. On notera $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ quand $\forall \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée on a : $\underset{n\infty}{lim}(\int \phi d\mathbb{P}_{X^n}) = \int \phi d\mathbb{P}_X$

Proposition 43. On considère les (X_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \underset{n\infty}{lim}(F_{X_n}(t)) = F_X(t)$ en tout point t où F est continue.

Application 11. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \underset{n\infty}{lim}(\mathbb{P}(a \leq X_n \leq b)) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \forall a, b$ où F est continue.
Cela s'étend à $\mathbb{R}^d$ en tout point a et b tel que $\mathbb{P}(X = a) = 0 = \mathbb{P}(X = b)$

Corollaire 15. (X_n, X) à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \underset{n\infty}{lim}(\mathbb{P}\{X_n = k\}) = \mathbb{P}\{X = k\}$

Proposition 44.
- La convergence presque sûre implique la convergence en loi.
- La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

Proposition 45. (Réciproque partielle)
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers c une constante alors elle converge aussi en probabilité vers c.

Proposition 46. Soit f une fonction continue

- Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{p.s} f(X)$
- $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$
- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$

Définition 48.
- La loi Binomiale de paramètre $(n, \lambda) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$ est donnée par :
  $B_{n,\lambda} = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\lambda^k(1 - \lambda)^{n-k}, \forall k \in \mathbb{N}$
- La loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est donnée par :
  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_\lambda(k) = \mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Lemme 24. Soient X (respectivement Y) qui suivant une loi de Poisson de paramètre λ(respectivement μ).
Si X et Y sont indépendantes, alors X+Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Lemme 25. Soit (X,Y) deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ et $A \subset \mathbb{N}$.
Alors $|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$

Théorème 40. (Inégalité de Le Cam)(Développement 2)
Soient $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \lambda$. Alors $\sum_{k\geq 0} |B_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) - \mathbb{P}_\lambda(k)| \leq \frac{4\lambda^2}{n^2}$

Théorème 41. (Lévy)

- Si $\phi_{X_n} \underset{n\infty}{\rightarrow} \phi_X$ simplement alors $X_n \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} X$.
- Si $\phi_{X_n} \underset{n\infty}{\rightarrow} \psi$ simplement et ψ continue en 0 alors ψ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Y et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Y.

Théorème 42. (Théorème Central Limite)
$X \in L^2$ alors $\frac{\sqrt{n}}{\sigma_X}(\mathbb{E}(X) - \frac{\sum_{i=1}^n X_n}{n} \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \mathcal{N}(0,1)$

Théorème 43. (Formule de Stirling)
$n! \sim \sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$

b Développement

b.1 Méthode de Monte Carlo

Théorème 44. (Méthode de Monte Carlo) (Développement 1)
Soient $A, B \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^1(I, \mathbb{R})$ tel que $|f| \leq A$ presque partout et $\int_I f^2 \leq B$ ainsi que (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur I.
On définit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e_n = \frac{\sum_{i=1}^n f(X_i) - \int_I f}{n}$
Alors e_n converge presque surement vers 0 et
$\forall \epsilon \in]0; \frac{1}{A}[$, $\mathbb{P}(|e_n| \geq \epsilon) \leq 2exp(\frac{n\epsilon^2}{4B})$

On débute par démontrer un petit lemme :

Lemme 26. $\forall t \in [-1, 1], exp(t) \leq 1 + t + t^2$

Preuve. Soit $g(t) = exp(-t)(1 + t + t^2)$ sur [-1,1] une fonction dérivable.
Alors :

$$\begin{aligned} g'(t) &= exp(-t)(-1 - t - t^2 + 1 + t) \\ &= texp(-t)(1 - t) \end{aligned}$$

Donc g est décroissante sur [-1,0] et croissante sur [0,1].
Donc $g(t) \geq g(0) = 1$, $\forall |t| \leq 1 \Rightarrow exp(t) \leq 1 + t + t^2$

Les $f(X_i)$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Comme X_1 est de loi uniforme sur I alors par le théorème de transfert on a $\mathbb{E}[|f(X_1)|] = \int_I |f| < +\infty$.
A l'aide de la loi forte des grands nombres, e_n converge presque surement vers 0.
Soit $\epsilon > 0$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R} \longmapsto exp(\alpha x) \in \mathbb{R}$ bijective croissante. Alors $\mathbb{P}(e_n > \epsilon) = \mathbb{P}(exp(\alpha e_n) > exp(\alpha\epsilon))$. Daprès l'inégalité de Markov, on en déduit que $\mathbb{P}(e_n > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\alpha e_n}]}{e^{\alpha\epsilon}}$.
But : Majorer $\mathbb{E}[e^{\alpha e_n}]$ pour un bon choix de α. Du fait que les X_i sont indépendants et de même loi, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\alpha e_n}] &= \mathbb{E}[\prod_{i=1}^n exp(\alpha \frac{f(X_i) - \int_I f}{n})] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[exp(\alpha \frac{f(X_i) - \int_I f}{n})] \\ &= (\mathbb{E}[exp(\alpha \frac{f(X_1) - \int_I f}{n})])^n \end{aligned}$$

Pour presque tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}|f(x) - \int_I f| &= |\int_I (f(x) - f(t))dt| \\ &\leq 2A\end{aligned}$$

Ainsi si $\alpha \leq \frac{n}{2A}$, alors $\frac{\alpha}{n}|f(x) - \int_I f| \leq 1$, pour presque tout $x \in I$. Grâce au lemme, pour presque tout $x \in I$,
$exp(\frac{\alpha}{n}(f(x) - \int_I f)) \leq 1 + \frac{\alpha}{n}(f(x) - \int_I f) + \frac{\alpha^2}{n^2}(f(x) - \int_I f)^2$.
Comme X_1 est de loi uniforme sur I, alors par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[exp(\alpha \frac{f(X_1) - \int_I f}{n})] &= \int_I exp^(\alpha \frac{f(X_1) - \int_I f}{n})dx \\ &\leq 1 + \frac{\alpha}{n}\int_I (f - \int_I f) + \frac{\alpha^2}{n^2}\int_I (f - \int_I f)^2 \\ &\leq 1 + 0 + \frac{\alpha^2}{n^2}(\mathbb{E}[f(X_1)^2] - 2\mathbb{E}[f(X_1)\int_I f] + \mathbb{E}[(\int_I f)^2]) \\ &\leq 1 + \frac{\alpha^2}{n^2}(\mathbb{E}[f(X_1)^2] - 2(\int_I f)^2 + (\int_I f)^2) \\ &\leq 1 + \frac{\alpha^2}{n^2}(\mathbb{E}[f(X_1)^2] - (\int_I f)^2) \\ &\leq 1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\mathbb{E}[f(X_1)^2] \\ & 1 + \frac{\alpha^2}{n^2}B\end{aligned}$$

car par le théorème de transfert on a $\mathbb{E}[f(X_1)^2] = \int_I f^2 \leq B$.
Or $ln(1+x) \leq x$, $\forall x \geq 0$. On en déduit que :
$\mathbb{E}[exp(\alpha e_n)] \leq (1 + \frac{\alpha^2}{n^2}B)^n \leq exp(\alpha^2 \frac{B}{n})$.
Donc $\mathbb{P}(e_n > \epsilon) \leq exp(-\alpha\epsilon + \alpha^2\frac{B}{n})$, $\forall \alpha \in [0, \frac{n}{2A}]$.
Minimisons α. La fonction polynomiale de second degré $-X\epsilon + X^2\frac{B}{n}$ en X est minimale lorsque $\alpha = \frac{e_n}{2B}$ or$\epsilon < \frac{B}{A}$.
On peut choisir $\alpha = \frac{e_n}{2B} \leq \frac{n}{2A}$. On a donc $\mathbb{P}(e_n > \epsilon) \leq exp(-\frac{n\epsilon^2}{4B})$. On remplace f par -f et e_n par $-e_n$. On obtient par symétrie $\mathbb{P}(-e_n > \epsilon) \leq exp(-\frac{n\epsilon^2}{4B})$.
Pour conclure on a prouvé que $\mathbb{P}(|e_n| > \epsilon) \leq 2exp(-\frac{n\epsilon^2}{4B})$

b.2 Inégalité de Le Cam

Théorème 45. (Inégalité de Le Cam)(Développement 2)
Soient $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \lambda$. Alors $\sum_{k \geq 0} |B_{n,\frac{\lambda}{n}}(k) - \mathbb{P}_\lambda(k)| \leq \frac{4\lambda^2}{n^2}$

Soient $p \in [0,1]$, on définit $b = max(pe^{-p}, p - e^{-p})$ et la loi de probabilité $\mu_p = (X, Y)$ sur $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ pour :

- $u_p(0,0) = e^{-p} - (p-b)$
- $u_p(0,1) = p - b$
- $u_p(1,0) = pe^{-p} - b$
- $u_p(1,1) = b$
- $u_p(k,0) = \frac{e^{-p}p^k}{k!}$, $\forall k \geq 2$
- $u_p(k,1) = 0$

Cela définit bien une loi de probabilités car toutes ces valeurs sont entre 0 et 1, de plus la somme de celles ci vaut 1.
Vérifions que X est bien une loi de Poisson de paramètre p :

- $\mathbb{P}(X=0) = e^{-p} - p(1-e^{-p}) + p(1-e^{-p}) = e^{-p} = \frac{e^{-p}p^0}{0!}$
- $\mathbb{P}(X=1) = 0 + pe^{-p} = \frac{e^{-p}p^1}{1!}$
- $\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-p}p^k}{k!}$, $\forall k \geq 2$

De même, on vérifie que Y est une loi de Bernoulli de paramètre p :

- $\mathbb{P}(Y=0) = e^{-p} - p(1-e^{-p}) + \sum_{k\geq 2} \frac{e^{-p}p^k}{k!} = -p + \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-p}p^k}{k!} = 1-p$
- $\mathbb{P}(Y=1) = p(1-e^{-p}) + pe^{-p} = p$
- $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 2p^2$ comme $1 - e^{-x} \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \neq Y) &= 1 - \mathbb{P}(X = Y) \\
&= 1 - e^{-p} + (p-b) - b \\
&= 1 - e^{-p} + p - 2b \\
&\leq p + p - 2b \\
&\leq 2(p-b)
\end{aligned}$$

Si $b = pe^{-p}$ alors $p - b = p(1-e^{-p}) \leq p^2$ et on a bien $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 2p^2$ sinon $b = p - e^{-p}$ et $pe^{-p} \leq p - e{-}p$.
Alors comme $e^{-p} \leq \frac{p}{p+1}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \neq Y) &\leq 2(p - p + e^{-p} \\
&= 2e^{-p} \\
&\leq \frac{p}{1+p}
\end{aligned}$$

Sachant que $pe^{-p} \leq p - e^{-p}$, montrons que $\frac{1}{1+p} \leq p$.
Comme $g(x) = e^{-x}(x+1) - x$ est une fonction dérivable (de dérivée $-xe^{-x} - 1$), décroissante sur [0,1]. Pour $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $g(x_0) \geq 0$ alors $p \geq x_0$.
Or x_0 est la plus grande racine du polynôme $x^2 + x + 1$. Donc comme $p \geq x_0 \Rightarrow \frac{1}{1+p} \leq p$ et on a $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 2p^2$.
Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrons que $|B_{n,\frac{\lambda}{n}}(A) - P_\lambda(A)| \leq 2\frac{\lambda^2}{n}$.
Considérons $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mu_{\frac{\lambda}{n}}$. Les lois X_i vérifient une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. D'après le lemme 4, $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\frac{\lambda}{n} = \lambda$. De plus, $\sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{n})$.
Alors avec le lemme 5,

$$\begin{aligned}
|P_\lambda(A) - B_{n,\frac{\lambda}{n}(A)}| &= |\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \in A) - \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n Y_i \in A)| \\
&\leq \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i) \\
&\leq \mathbb{P}(\exists i \in \{1, ..., n\}, X_i \neq Y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^n 2(\frac{\lambda}{n})^2 \\
&\leq \frac{2\lambda^2}{n}
\end{aligned}$$

On considère alors $A = \{k \in \mathbb{N}, B_{n,\frac{\lambda}{n}(k) \geq P_\lambda(k)}\}$.
Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} |P_\lambda(k) - B_{n,\frac{\lambda}{n}(k)}| &= \sum_{k \in A} |P_\lambda(k) - B_{n,\frac{\lambda}{n}(k)}| + \sum_{k \notin A} |P_\lambda(k) - B_{n,\frac{\lambda}{n}(k)}| \\
&= \sum_{k \in A} B_{n,\frac{\lambda}{n}(k)} - \sum_{k \in A} P_\lambda(k) + \sum_{k \notin A} P_\lambda(k) - \sum_{k \notin A} B_{n,\frac{\lambda}{n}(k)} \\
&= B_{n,\frac{\lambda}{n}}(A) - P_\lambda(A) + P_\lambda(\overline{A}) - B_{n,\frac{\lambda}{n}}(\overline{A}) \\
&\leq \frac{2\lambda^2}{n} + \frac{2\lambda^2}{n} \\
&= \frac{4\lambda^2}{n}
\end{aligned}$$

Références

- Thierry GALLOUET et Raphaël HERBIN Mesure, Intégration, Probabilités.
- Paul-S TOULOUSE Thème de probabilités et statistiques Dunod 1999
- Olivier GARET et Aline KURTZMANN De l'intégration aux probabilités Ellipses 2011